ИЗВѢСТІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ. 1904. ЯНВАРЬ. Т. XX, № 1.

(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg. 1904. Janvier. T. XX, № 1.)

Sur un intégrateur des équations différentielles ordinaires.

Par **A. Kriloff**, Professeur à l'Académie Navale, St.-Pétersbourg.

(Présenté le 14 janvier 1904).

§ 1. Cette note a pour objet l'exposition du principe et une description sommaire d'un appareil destiné pour l'intégration mécanique des équations différentielles ordinaires de n'importe quel ordre et quelle forme.

En ce moment (janvier 1904) un appareil de ce genre est en cours de construction d'après mes plans chez M. R. Wetzer, mécanicien de précision à St.-Pétersbourg.

§ 2. Il parait que la première idée de l'intégration des équations différentielles à l'aide d'un appareil mécanique appartient à Lord Kelvin; le premier volume de la seconde édition de la Natural Philosophy de Sir W. Thomson and Tait, contient la description du mécanisme en principe.

L'illustre auteur emploie dans ce but l'intégrateur de son frère le prof. James Thomson. Ce mécanisme consiste en principe des trois parties suivantes: 1° d'un disque incliné qui reçoit un mouvement de rotation autour d'un axe passant par son centre perpendiculairement au plan du disque, 2° d'un cylindre droit à section circulaire, dont l'axe est placé parallèlement au plan du disque, le cylindre pouvant tourner librement autour de son axe, 3° d'un globe pésant placé entre le disque le cylindre de manière à toucher en même temps le plan du premier et la surface du second. La fig. 1 représente le schéma de l'appareil. Le globe est maintenu par une fourche à l'aide de laquelle il peut être deplacé le long du cylindre; on règle l'appareil de telle manière que le globe parcourant la génératrice entière du cylindre, son point de contact avec le disque, supposé immobile en décrive un diamètre.

On voit aisement, que si l'on fait tourner le disque de telle sorte que son déplacement angulaire soit proportionnel, à l'abscisse x, et si en même temps on maintient à l'aide de la fourche le globe de telle sorte que la distance de son centre, au plan mené par l'axe du disque perpendiculairement à l'axe du cylindre (plan axial), soit toujours égale à l'ordonnée y, correspondant à l'abscisse x, le déplacement angulaire du cylindre sera proportionnel à la valeur de l'intégrale définie:

$$\int_a^x y\,dx.$$

On suppose, bien entendu, que la transmission du mouvement s'effectue sans glissement.

En effet soit une telle liaison cinématique établie entre le mouvement du disque et du plan sur lequel la courbe $y = f(x)$ est tracée, que le déplacement du plan s'effectue dans la direction de l'axe des x, perpendiculairement à l'axe du cylindre, et soit égal au déplacement linéaire des points du disque situés à la distance r de son centre. Soit R le rayon du cylindre; si l'on met le disque en mouvement, en poursuivant en même temps avec

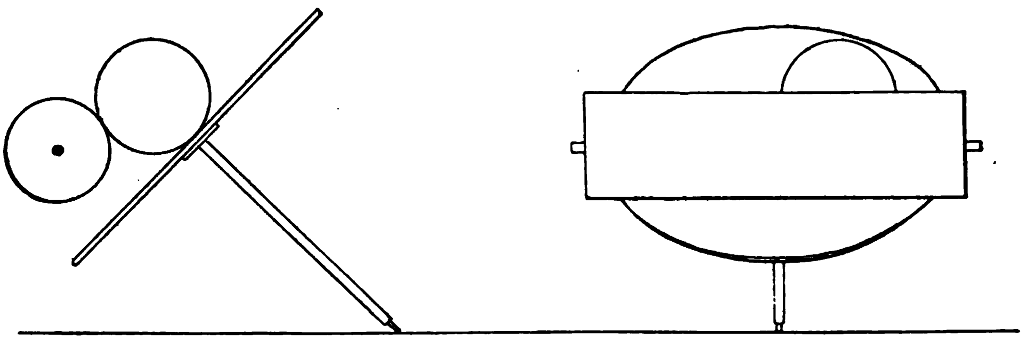

Fig. 1.

un bout de la fourche la courbe $y = f(x)$ et maintenant ainsi le centre du globe toujours à la distance y du plan axial mentionné plus haut, on voit, que le disque ayant tourné de l'angle $d\omega$, le déplacement linéaire de son point de contact avec le globe sera $y d\omega = \frac{1}{r} \cdot y dx$. Ce déplacement sera transmis au cylindre qui tournera de l'angle $d\varphi = \frac{1}{R} y d\omega = \frac{1}{Rr} y dx$. Donc pour un déplacement fini du mécanisme, x variant de a à x on aura:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{Rr} \cdot \int_a^x y\,dx.$$

L'appareil de M. J. Thomson peut évidemment être rendu inscrivant, on prendra pour cela un point quelconque sur la base du cylindre à la distance l de son centre, et on établira une telle liaison cinématique que le déplacement linéaire de ce point soit égal à celui Y du style ou de la plume inscrivante, on aura alors

$$Y = l(\varphi - \varphi_0) = \frac{l}{Rr}\int_a^x y\,dx.$$

Par un choix convenable des longueurs l et r on rendra le facteur constant $\frac{l}{Rr}$ égal à l'unité de l'echelle admise pour le tracé des courbes y et Y, on aura alors simplement

$$Y = \int_a^x y\,dx.$$

Nous allons dans la suite exprimer cette proprieté du mécanisme brièvement en disant, que la fonction y étant fournie à la fourche c'est son intégrale, qui est rendue par le cylindre.

§ 3. C'est à l'intégration de l'équation linéaire du second ordre et sans second membre, que Lord Kelvin applique en premier lieu une combinaison d'appareils de son frère. Soit

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

où p_1 et p_2 sont des fonctions données de x seul, une telle équation, qu'il s'agit d'intégrer de telle manière que pour $x = a$, y soit égal à b_0 et y' soit égal à b_1, b_0 et b_1 étant deux constantes données.

En multipliant l'équation (1) par $e^{\int p_1 dx}$, on pourra l'écrire ainsi:

$$\frac{d}{dx}\left\{e^{\int p_1 dx}\frac{dy}{dx}\right\} + p_2 e^{\int p_1 dx}\cdot y = 0$$

et en introduisant une nouvelle variable indépendante z à la place de x par l'équation:

$$z = \int p_2 \cdot e^{2\int p_1 dx}\cdot dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

on aura:

$$\frac{d}{dz}\left\{p_2 e^{2\int p_1 dx}\frac{dy}{dz}\right\} + y = 0.$$

Pour avoir un résultat parfaitement défini on prendra toutes les intégrales entre les limites a et x, et au moyen de l'équation (2) on exprimera x en fonction de z; en portant ensuite cette valeur dans la fonction

$p_2 e^{2\int p_1 dx}$ on l'exprimera aussi en fonction de z, que nous désignerons par $-\frac{1}{P(z)}$. On aura donc:

$$p_2 e^{2\int p_1 dx} = -\frac{1}{P(z)}$$

l'équation (1) prendra alors la forme:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{P(z)}\cdot\frac{dy}{dz}\right) = y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

et les conditions initiales seront:

$$\text{pour } z = 0 \ldots y \text{ soit égal à } b_0$$
$$y' \quad » \quad » \text{ à } b_1.$$

Pour intégrer mécaniquement l'équation (3) il faut d'après l'auteur même procéder de la manière suivante: «Prenez deux intégrateurs à disque globe, cylindre de mon frère et établissez entre la fourche qui guide le globe de chacun des appareils et le cylindre de l'autre une telle liaison que leurs déplacements respectifs soit égaux. Faites mouvoir le disque d'un appareil de l'angle z et en même temps le disque de l'autre d'un angle toujours égal à $\int_0^z P(z)dz$, alors le déplacement de la circonférence du cylindre du second appareil et celui du centre du globe du premier, représenteront chacun la valeur de y correspondant à z et satisfaisant l'équation differentielle (3).

«Pour le demontrer soient g_1 et g_2 les déplacements des deux globes comptés de leurs plans axiaux et correspondants au déplacement z du premier disque et soient dz et Pdz les accroissements infinitésimaux des déplacements angulaires des disques respectifs. Les mouvements des circonférences des cylindres seront:

$$g_1 dz \quad \text{et} \quad g_2 P(z)\, dz.$$

Mais les liaisons établies font parcourir au second globe un éspace égal au déplacement de la circonférence du premier cylindre, et au premier globe un éspace égal au déplacement de la circonférence du second cylindre. On a donc:

$$dg_2 = g_1 dz \quad \text{et} \quad dg_1 = g_2 P(z)\, dz$$

en éliminant g_2 on a:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{P(z)}\cdot\frac{dg_1}{dz}\right) = g_1$$

ce qui montre que g_1 satisfait bien à l'équation proposée (3)»[1]).

1) Natural Philosophy, Part. I, p. 499.

Pour satisfaire aux conditions initiales on placera pour la valeur initiale $z = 0$ les globes dans les positions respectives

$$g_1 = b_0 \quad \text{et} \quad g_2 = b_1 P(o).$$

Ainsi l'équation linéaire sans second membre se trouve intégrée, du moins théoriquement, toutes les opérations auxiliaires n'étant que des quadratures, qui peuvent être effectuées avec le même appareil.

§ 4. Ensuite Lord Kelvin remarque que si l'on prend une chaine de i intégrateurs et que l'on les réunisse de telle manière que la fourche du second ait un déplacement égal à celui du cylindre du premier, la fourche du troisième ait un déplacement égal à celui du cylindre du second etc. ... et enfin la fourche du premier soit réuni au cylindre du dernier de manière à avoir le même déplacement, et si en outre on imprime aux disques un mouvement tel que les déplacements infinitésimaux simultanés soient: $P_1 dx$, $P_2 dx$; .... $P_i dx$, le déplacement du premier globe g_1 et celui du dernier cylindre satisferont à l'équation différentielle:

$$u = \frac{1}{P_1} \frac{d}{dx} \frac{1}{P_2} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} \frac{1}{P_i} \frac{du}{dx} \cdot \;\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Quant à l'équation linéaire générale

$$Q_1 \frac{d^i u}{dx^i} + Q_2 \frac{d^{i-1} u}{dx^{i-1}} + \cdots + Q_i \frac{du}{dx} - u = 0 \;\ldots\ldots \quad (5)$$

Lord Kelvin recommande de prendre une chaine de i intégrateurs successifs réunis de la manière indiquée plus haut et de supposer

$$P_1 = P_2 = P_3 = \cdots = 1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

c'est à dire à communiquer à tous les disques le même mouvement et de maintenir constamment entre les déplacements des i fourches et entre le déplacement K_i du dernier cylindre la relation

$$Q_1 g_1 + Q_2 g_2 + \cdots + Q_i g_i = K_i \;\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

alors K_i satisfera à l'équation (5).

La manière de satisfaire continuellement à la relation (7) n'est pas specifiée, l'auteur s'exprimant ainsi: «Tant que l'on ne désire pas de construire actuellement une machine pour intégrer des équations différentielles du troisième ou d'un ordre supérieur il n'est pas nécessaire d'entrer dans les détails des plans pour l'exécution mécanique de la condition (7), il suffit de savoir, que cela est possible par un mécanisme travaillant d'une manière continue et lié aux disques tournants du train d'intégrateurs».

Pour une équation d'un ordre et d'une forme quelconque:

$$f\left(x,\ \frac{d^i u}{dx^i},\ \frac{d^{i-1}u}{dx^{i-1}},\ \ldots\ \frac{du}{dx},\ \ u\right)=0 \ \ldots\ldots \ (8)$$

l'auteur propose de prendre la même chaine de i intégrateurs réunis et de maintenir continuellement entre les déplacements $g_1, g_2, \ldots\, g_i$, des i globes, le déplacement K_i du dernier cylindre et le déplacement commun x des disques la relation:

$$f(x,\ g_1,\ g_2,\ \ldots g_i,\ K_i)=0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (9)$$

K_i fournira la solution de l'équation (8).

Ici la manière pratique de satisfaire à la relation (9) n'est nullement indiquée, sauf en guise d'exemple pour le système:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=X_1,\quad \frac{d^2y_1}{dt^2}=Y_1$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}=X_2;\quad \frac{d^2y_2}{dt^2}=Y_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

où

$$\begin{aligned}X_1 &= (x_2-x_1)\cdot f[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]\\ &\quad +(x_3-x_1)\cdot f[(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2]\\ &\quad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ Y_1 &= (y_2-y_1)\cdot f[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]\\ &\quad +(y_3-y_1)\cdot f[(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2]\\ &\quad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

f designant une fonction donnée.

« Construisez on acier poli (frictionless) la surface dont l'équation soit

$$z = \xi f(\xi^2+\eta^2)$$

et à l'aide de cette surface employée comme une came, mais à deux variables indépendantes faites mouvoir une pièce auxiliaire que je nommerai la pièce a_2, en ligne droite de telle sorte que son déplacement soit toujours égal à

$$(x_2-x_1)\, f[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2],$$

une autre pièce a_3 de manière qu'elle ait toujours le déplacement

$$(x_3-x_1)\, f[(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2]$$

etc. . . . .

Etablissez maintenant entre une pièce X et les pièces auxiliaires a_2, a_3 etc. . . . une telle liaison, que le déplacement de la pièce X soit égal à la somme algébrique des déplacements des pièces auxiliaires, c'est à dire que l'on ait

$$X = (x_2 - x_1) f[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] +$$
$$+ (x_3 - x_1) f[(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2] + \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Ce qui se fera à l'aide d'une corde passant par des poulies réunies aux pièces auxiliaires a_2, a_3, ... de la même manière que dans la machine pour la prédiction des marées....»

§ 5. C'est avec intention que je reproduis presque textuellement dans ce qui precède les indications très succintes que l'illustre auteur propose pour la construction de la machine à intégrer les équations différentielles.

On voit que la plus grande difficulté réside dans une manière vraiment pratique à établir une relation analogue à (7) ou à (9) ou à (10), car on comprend aisément que la construction effective d'une surface en acier poli est sinon impraticable, du moins extrémement couteuse et difficile.

Des recherches théoriques sur les vibrations des coques des navires exigeaient une intégration approximative d'une certaine équation différentielle linéaire du quatrième ordre à coefficients variables. La méthode d'approximation dite des quadratures mécaniques conduisait à des calculs fort penibles, et j'ai resolu à recourir à la machine de Lord Kelvin et d'en faire construire une pour le Bassin Expérimentale de la Marine, dont la direction m'est confiée. En étudiant le schéma du mécanisme pour en faire les plans d'exécution j'ai remarqué que le système proposé par Lord Kelvin pouvait être rendu aisement exécutable en pratique par l'introduction de deux mécanismes auxiliaires que je nomme *le multiplicateur* et *l'égaliseur* et que ces deux mécanismes augmentent notablement la portée des différentes applications de la machine.

Le premier de ces mécanismes a pour but d'effectuer automatiquement la multiplication de deux quantités variables $f_1(x)$ et $f_2(x)$, c'est a dire de fournir continuellement le produit $f_1(x) \cdot f_2(x)$ quand on donne les deux facteurs.

Le second a pour but de maintenir constament la relation

$$Z_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{n-1} = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

entre les variables Z_0, Z_1, ... Z_n, c'est à dire quand les valeurs de $n-1$ de ces quantités sont introduites dans le mécanisme, celui-ci astreigne une de ces parties à prendre une position telle qu'elle fournisse la valeur de la $n^{\text{ième}}$ quantité satisfaisant à la relation (11).

Ce dernier mécanisme n'avait pas besoin d'être inventé, il etait tout indiqué dans la dernière phrase de la citation ci-dessus de la Natural Philosophy.

Je vais montrer que l'introduction de ces deux mécanismes auxiliaires rend en effet le problème de l'intégration mécanique des équations différentielles aisément exécutable dans la pratique de la construction.

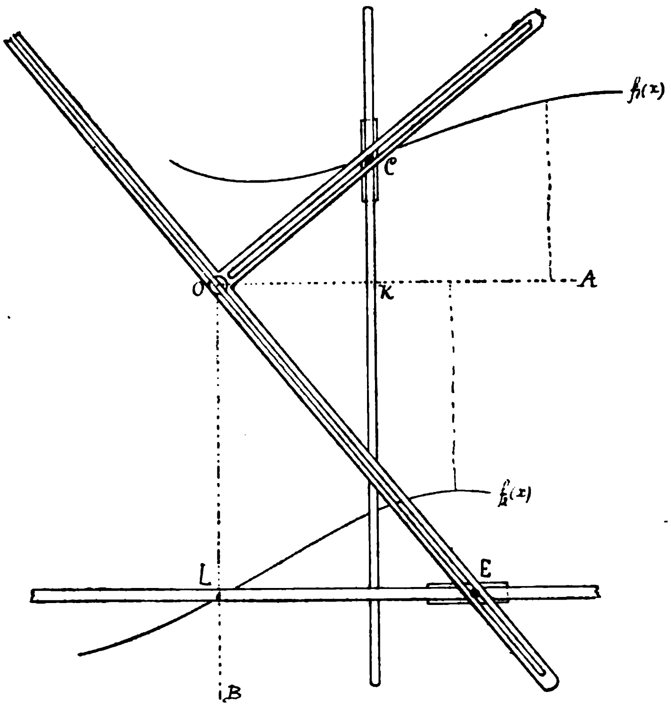

Fig. 2.

§ 6. *Le multiplicateur* consiste en principe en un levier coudé à angle droit mobile autour du point O (fig. 2). Soit les deux droites OA et OB; portons sur la première la longueur $OK = 1$ à l'echelle du dessin pour les gabarits représentant les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$, et fixons en K une règle perpendiculairement à OA; que l'on monte sur cette règle une douille mobile portant le bouton C. Ce bouton s'engage dans une rainure correspondante du bras OD du levier coudé. En appliquant à la ligne OA le gabarit représentant la fonction $f_1(x)$ de telle manière que le point K corresponde à l'abscisse x, le gabarit asujetira le bouton C à prendre une position telle que CK soit égal à $f_1(x)$, et le levier prendra une position telle que tangente de l'angle $AOC = BOE$ sera $f_1(x)$.

Une règle mobile LE glisse la long de la droite OB en restant toujours perpendiculaire à OB. Cette règle possède une rainure dans laquelle s'engage un bouton E, qui glisse en même temps librement dans la rainure du bras OE du levier; si la position de la règle LE est régie par le gabarit $f_2(x)$ de telle sorte que OL soit toujours égale à $f_2(x)$, le bouton E prendra une position telle que $LE = f_1(x) \cdot f_2(x)$.

On voit par ceci que ni la construction du mécanisme, ni la construction des deux gabarits en *simples* cames (coordonnées polaires) ou en coordonnées rectilignes ne presentent aucune difficulté.

§ 7. *L'égaliseur* n'est que la machine de Lord Kelvin à prédire les marées, dont on renverse le mode de fonctionnement.

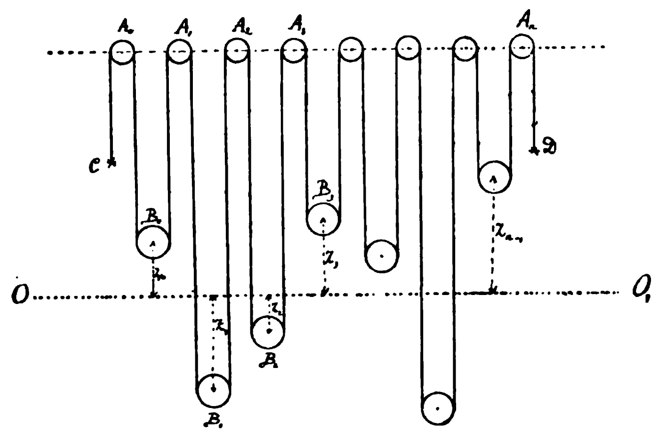

Fig. 3.

Soit (fig. 3) un système de poulies fixes $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots . A_n$ rangées de manière que leurs centres soient en ligne droite horizontale, soit $B_0, B_1, B_2, \ldots . B_{n-1}$ n poulies mobiles; que l'on fasse passer une corde inextensible de la manière indiquée sur la figure, que l'on en fixe le bout C, que l'on amène les poulies mobiles à prendre une position telle que leur centres se trouvent tous rangés sur la droite OO_1 paralèlle à A_0A_n et que l'on fixe le bout D de la corde. L'égaliseur est prêt à fonctionner, en effet, que l'on amène les poulies $B_1, B_2, \ldots . B_{n-1}$ respectivement dans les positions où les distances de leurs centres à l'axe OO_1 soit $Z_1, Z_2, \ldots . Z_{n-1}$, portant les valeurs positives vers le haut et les valeurs négatives vers le bas, la poulie B_0 prendra une position telle que son ordonnée Z_0 satisfera à la relation:

$$Z_0 + Z_1 + \ldots . + Z_{n-1} = 0.$$

La «tide predicting machine» de Lord Kelvin fonctionnant à merveille pour le calcul des «tide-tables» de l'Amirauté Anglaise, il ne peut pas y exister de doute possible sur l'exécution pratique de l'*égaliseur* et sur le mode de son fonctionnement.

9

§ 8. Le multiplicateur et l'égaliseur étant décrits je passe au schéma du mécanisme complet. Je reprends la question *ab ovo* et je considère en premier lieu l'équation linéaire générale avec second membre.

Soit:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_n y + q = 0 \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

où $p_1, p_2, \ldots . p_n$ et q sont des fonctions données de la variable indépendante x, l'équation proposée à intégrer de telle manière que pour $x = a$:

y	soit	égal	à	b_0
y'	»	»	»	b_1
y''	»	»	»	b_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$y^{(n-1)}$	»	»	»	b_{n-1}

$b_0, b_1, b_2, \ldots . b_{n-1}$ étant des constantes données.

En portant dans l'équation $x = a$, je calcule la valeur initiale $y^{(n)} = b_n$ (pour $x = a$) en fonction de $a, b_0, b_1, \ldots . b_{n-1}$.

En posant:

$$z = y^{(n)}$$

et ensuite:

$$\left.\begin{aligned}
z_1 &= \int_a^x z\,dx + b_{n-1} = y^{(n-1)} \\
z_2 &= \int_a^x z_1 dx + b_{n-2} = y^{(n-2)} \\
z_3 &= \int_a^x z_2 dx + b_{n-3} = y^{(n-3)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z_k &= \int_a^x z_{k-1} dx + b_{n-k} = y^{(n-k)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z_n &= \int_a^x z_{n-1} dx + b_0 = y^{(n)}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

on voit que l'équation proposée prendra la forme:

$$q + z + p_1 z_1 + p_2 z_2 + \ldots . + p_n z_n = 0 \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

En considérant le système (13) et l'équation (14) on voit que l'on a bésoin des procedés élémentaires suivants, pour avoir continuellement des valeurs qui les satisfassent:

1°. z_{k-1} *étant donné — trouver* z_k, ce problème se resout immediatement par l'intégrateur de M. J. Thomson, on fournit à la fourche la valeur z_{k-1}, le cylindre donne z_k.

2°. p_k et z_k *étant donnés trouver leur produit* $p_k z_k$. C'est dans ce but précisement que le multiplicateur est construit, son premier bouton C est lié au cylindre donnant Z_k de manière que le déplacement CK de ce bouton de sa position initiale soit égalé à la valeur de z_k c'est à dire au déplacement de la circonférence du cylindre, la règle mobile étant guidée par le gabarit représentant la fonction $p_k(x)$, ce gabarit recevant son mouvement en commun avec les disques, le bouton E prendra une position telle que $LE = p_k(x) \cdot z_k$.

3°. *Maintenir continuellement entre les quantités* $z, p_1 z_1, p_2 z_2 \ldots . p_n z_n$ et q *la relation*:

$$q + z + p_1 z_1 + p_2 z_2 + \ldots . + p_n z_n = 0 \quad \ldots \ldots , \quad (14)$$

C'est l'égaliseur qui sert dans ce but. On en prend un qui contienne $n+2$ poulies mobiles, la première de ces poulies est guidée par un gabarit représentant la fonction $q(x)$, la seconde est reliée avec la fourche du premier intégrateur pour lui fournir continuellement z, la troisième au bouton du multiplicateur, donnant $p_1 z_1$ etc. . . . .

On voit ainsi que le schéma du mécanisme est donné par la fig. (4).

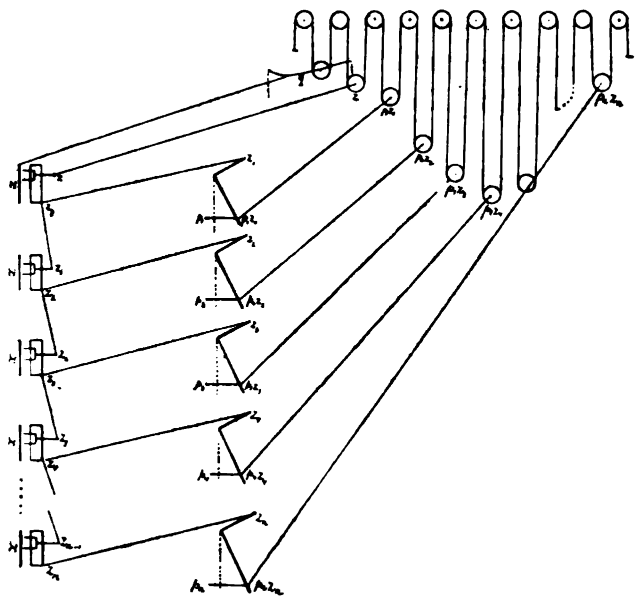

Fig. 4.

Chaque intégrateur, dont le nombre n est égal à l'ordre de l'équation, est representé sur le schéma par le trait vertical figurant le disque, par la fourche, et par le rectangle figurant le cylindre.

Une ligne réunissant deux éléments quelconques designe une liaison simple c'est à dire que les déplacements des éléments liés sont égaux. Les petits cercles représentent les poulies de l'égaliseur, chaque élément est designé par les lettres représentant les valeurs des fonctions qu'il reçoit ou qu'il rend.

Ainsi je commence par installer tous les disques sur la valeur $x = a$, ensuite, je mets en place les gabarits p_1, p_2, ... p_n et q dans leur positions initiales correspondant à la valeur de l'abscisse $x = a$ et je les relie aux disques, j'installe les boutons respectifs des multiplicateurs sur les valeurs initiales $z_n = b_0$, $z_{n-1} = b_1$, ... etc.... $z_1 = b_{n-1}$, cela instale en même temps les fourches correspondantes, les poulies de l'égaliseur étant reliées aux multiplicateurs prennent les positions respectives:

$$q(a), \quad p_1(a)b_{n-1}, \quad p_2(a)b_{n-2}, \ldots p_n(a)\,b_0$$

la dernière poulie est *astreinte* à prendre la position $z = b_n$, elle guide en même temps la première fourche et l'amène dans la position correspondante.

L'appareil étant installé je mets en marche le mouvement d'horlogerie qui fait tourner les disques et j'obtiens par le déplacement du cylindre z_n l'intégrale générale $z_n = y$ et par ceux des autres cylindres les derivées de y jusqu'à l'ordre $n - 1$; toutes ces fonctions étant inscrites par des styles correspondants sur des bandes de papier à une echelle proprement choisie.

En posant $n = 2$ on voit immédiatement quelle simplification et quelle généralisation est apportée par l'adjonction du multiplicateur et de l'égaliseur à la méthode de Lord Kelvin pour intégrer même l'équation linéaire du second ordre.

Plus de calculs auxiliaires, plus de changement de variables à faire, plus de variation de constantes arbitraires pour avoir l'intégrale de l'équation avec second membre. On prend l'équation telle qu'elle est proposée et on en représente par des gabarits en zinc ou en carton les coefficients.

Ainsi l'intégration des équations linéaires à coefficients variables et avec second membre se trouve pratiquement effectuée par une chaine cinématiquement fermée et qui consiste d'intégrateurs, de multiplicateurs et de l'égaliseur. Le nombre d'intégrateurs est égal à l'ordre de l'équation, le nombre de multiplicateurs est égal au nombre de coefficients différents de 1, le nombre d'éléments de l'égaliseur est égal au nombre des termes de l'équation. Ainsi pour toutes les équations linéaires la machine reste la même ce ne sont que les gabarits représentant les coefficients qui changent, comme par exemple les plaques perforées dans le métier Jacquart ou dans les caisses à musique.

§ 9. Considérons maintenant des équations plus générales que les équations linéaires, en premier lieu celles qui contiennent la fonction inconnue y et ses derivées algébriquement, la variable indépendante x étant contenue n'importe comment.

En faisant usage de la notation définie par le système (13), on voit qu'une telle équation pourra être réduite à la forme:

$$\sum P_i(x)\cdot z_n^a z_{n-1}^b \dots z^h = 0 \,.\; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (15)$$

$P_i(x)$ étant des fonctions données de x; $a, b, c, \dots h$ des nombres entiers positifs ou zéro.

Le schéma général du mécanisme reste le même que ci-dessus, ce sont seulement des multiplicateurs additionels que l'on aura à introduire de manière à former les termes correspondants. Soit pour fixer les idées un terme de la forme $P(x)\cdot z_1^2 z_3$. On l'ecrira ainsi $P(x)\cdot z_1\cdot z_1\cdot z_3$ et on prendra trois multiplicateurs que l'on arrangera de la manière suivante, figurée sur le schéma (fig. 5) le premier multiplicateur donne $P(x)\cdot z_1$, le second reçoit du premier le facteur $P(x)\cdot z_1$ et du cylindre correspondant le facteur z_1; il fournit donc le produit $P(x)\cdot z_1\cdot z_1$ au troisième multiplicateur, qui reçoit en même temps de l'un des cylindres le facteur z_3 et transmet le terme $P(x)\cdot z_1\cdot z_1\cdot z_3$ à l'élément correspondant de l'égaliseur.

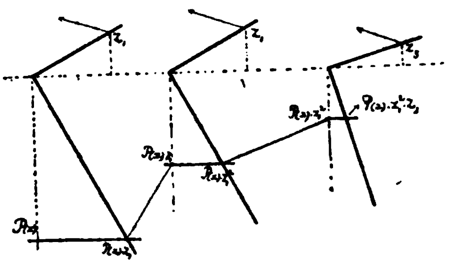

Fig. 5.

Il n'y a rien à changer au reste.

Une seule remarque est nécessaire si l'équation (15) contient la dérivée $y^{(n)} = z$ de l'ordre le plus elevé au degré k, sa valeur initiale b_n sera fournie par une équation algébrique du $k^{\text{ième}}$ degré. On trouvera donc k valeurs différentes pour b_n; on prendra successivement chacune de ces valeurs, si elles sont toutes réelles, ou celles qui le sont, et on obtiendra successivement les branches correspondantes de l'intégrale générale.

Je n'ai pas bésoin d'exprimer le theorème sur le nombre d'éléments de la chaine cinématique fermée composée d'intégrateurs, de multiplicateurs et de l'égaliseur, qui fournit l'intégration de l'équation générale de l'ordre n algébrique par rapport à y et à ses derivées, ce theorème est évident d'après ce qui precède.

Je remarquerai seulement que le mécanisme reste toujours le même, ce ne sont que les gabarits des $P(x)$, et les liaisons des pièces entre elles qui changent, ces liaisons restant toujours simples, c'est à dire un simple fil inextensible, qui fait que les déplacements des deux pièces reliées soient égaux.

§ 10. Considérons maintenant une classe d'équations encore plus générales, supposons que la fonction inconnue et ses derivées soient contenues dans l'équation, de même que la variable indépendante sous des signes de fonctions quelconques mais à variables separées et que l'équation soit entière par rapport à ces fonctions. C'est à dire que l'équation soit de la forme (tenant compte du système (13)):

$$\sum_i P_i(x) \cdot \varphi_{0i}(z) \cdot \varphi_{1i}(z_1) \ldots \varphi_{ni}(z_n) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

P_i, φ_{0i}, φ_{1i}, φ_{2i}, ... φ_{ni} désignant des fonctions données de leurs arguments respectifs, et ne contenant pas d'autres variables.

On construira alors non seulement les gabarits $P_i(x)$ mais aussi les gabarits représentant les fonctions $\varphi_{oi}(z)$; $\varphi_{1i}(z)$ etc. ....

Soit alors le terme $P(x) \cdot \varphi(z) \cdot \varphi_1(z_1)$, on prendra deux multiplicateurs, dans le premier on met le gabarit $P(x)$ lié au mouvement des disques pour guider la règle, et le gabarit $\varphi(z)$ relié à la fourche qui reçoit z de la poulie correspondante de l'égaliseur, ce multiplicateur donne le produit $P(x) \cdot \varphi(z)$, on le reçoit sur le multiplicateur suivant, dont le bouton C est guidé par le gabarit $\varphi_1(z_1)$ relié au cylindre donnant z_1, le bouton E de ce second multiplicateur donnera le produit $P(x) \cdot \varphi(z) \cdot \varphi(z_1)$, on le transmet à l'élément correspondant de l'égaliseur.

§ 11. On pourra même prendre des équations ou de systèmes d'équations plus compliquées que celles que je viens de considérer.

Je prendrai par exemple le système des équations du mouvement d'un point matériel attiré par un centre fixe, la loi de l'attraction étant représentée par la fonction f de la distance r.

Les équations du mouvement seront:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r} \cdot f(r) \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r} \cdot f(r)$$

ou $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Je construit le gabarit plan représentant la fonction

$$\frac{1}{r} \cdot f(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2}} \cdot F(r^2)$$

et je prends quatre intégrateurs et deux égaliseurs et j'établie les liaisons représentées sur le schéma (fig. 6).

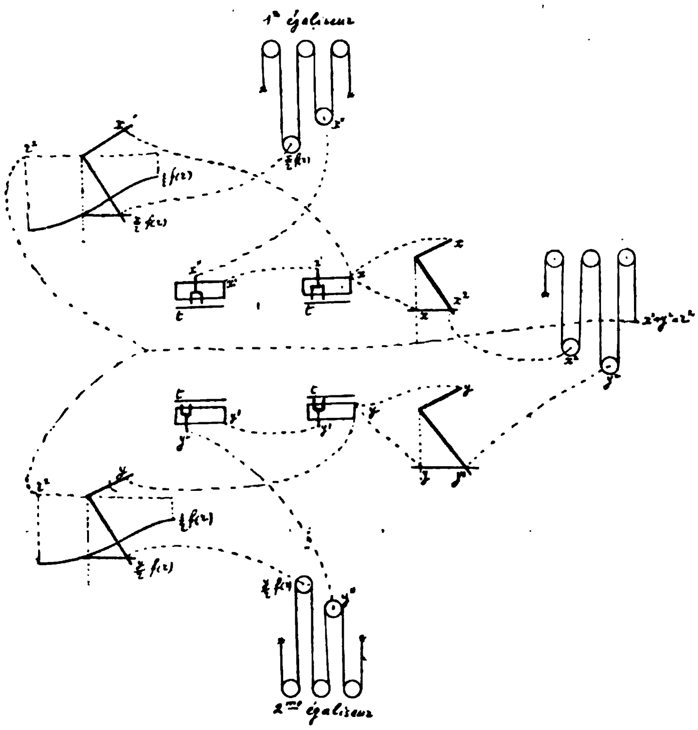

Fig. 6.

Les deux multiplicateurs auxiliaires joints au second et au quatrième cylindre me donnent x^2 et y^2; pour faire la somme $r^2 = x^2 + y^2$ je reçois x^2 et y^2 par les deux éléments du tide-predictor, alors le bout A du fil me donne $r^2 = x^2 + y^2$.

Ce point A est relié aux gabarits représentant $\frac{1}{r} f(r)$ et les mène dans les deux multiplicateurs, dont les boutons sont joints avec le second et le quatrième cylindre en sorte que ces multiplicateurs donnent les produits $\frac{x}{r} \cdot f(r)$, et $\frac{y}{r} f(r)$; ces produits sont transmis aux éléments des deux égaliseurs, ainsi que le schéma le montre.

On procédera d'une manière tout analogue dans des cas plus compliqués, où l'équation contiendrait par ex. la fonction:

$$f\,[\varphi\,(x, z, z_1 \ldots . z_k)]$$

f désignant une fonction quelconque et $\varphi\,(x, z, z_1, z_2 \ldots . z_k)$ une fonction succeptible d'être représentée par un système de gabarits, de multiplicateurs et de tide-predictors. On construira le gabarit plan représentant

$$f\,(\varphi)$$

et faisant usage de multiplicateurs auxiliaires, de gabarits et de «tide-predictors» on formera la fonction $\varphi(x, z, z_1 \ldots\ldots z_k)$ qui sera par ex. fournie par le bout du fil du «predictor», c'est le mouvement de ce point qui menera le gabarit $f(\varphi)$.

On voit par ceci que l'introduction des deux mécanismes — le multiplicateur et l'égaliseur, donne un moyen pratique permettant d'appliquer la machine pour intégrer les équations différentielles ordinaires de toutes les formes qu'il est possible de représenter par des gabarits plans et de tous les ordres, ou de systèmes de telles équations.

Le mécanisme reste toujours le même, ce ne sont que les gabarits qui changent **en restant toujours plans**, donc aisément exécutables en pratique [1]).

§ 11. L'adjonction du multiplicateur permet immédiatement de faire usage de l'intégrateur pour l'analyse harmonique.

Soit par exemple une fonction $F(x)$ donnée dans l'intervalle de $x = 0$ à $x = l$, et il s'agit de représenter cette fonction par une série de fonctions harmoniques simples: $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n \ldots\ldots$ comme cela a lieu dans une foule de problèmes de physique mathématique.

La propriété fondamentale des fonctions harmoniques est exprimée par la formule:

$$\int_0^l X_i X_k dx = 0$$

quand i et k sont différents.

On pose donc:

$$F(x) = A_1 X_1 + A_2 X_2 \ldots\ldots + A_k X_k + \ldots\ldots + A_n X_n + \ldots\ldots$$

et pour calculer le coefficient A_k ou multiplie l'équation précédente par $X_k dx$ et on l'intègre entre les limites 0 et l, et l'on obtient:

$$A_k = \frac{\int_0^l F(x) \,.\, X_k \,.\, dx}{\int_0^l X_k^2 dx}.$$

C'est surtout du calcul du numérateur qu'il s'agit, le dénominateur pouvant en général être calculé sans que l'on ait besoin d'effectuer l'intégration.

1) La classe des fonctions représentables par les gabarits plans et leurs combinaisons au moyen de multiplicateurs et du predictor est extrêmement étendue, elle comprend entre autres les fonctions algébriques et les transcendantes usuelles et leurs combinaisons. Ce sont les fonctions dépendant essentiellement de deux arguments non isolables p. ex. $\sin am(y, x)$ etc., que l'on ne saurait représenter par des gabarits plans.

On prendra donc un intégrateur, on construira les deux gabarits $F(x)$ et X_k, que l'on mettra dans les deux bras d'un multiplicateur, en reliant les deux gabarits au disque, et la fourche au bouton qui donne le produit $F(x)\cdot X_k$ et en commençant de $x=0$ on mettra le disque en mouvement, qu'un butoir arretera quand x sera égal à l. Le cylindre donnera la valeur de l'intégrale

$$\int_0^l F(x)\cdot X_k\cdot dx.$$

On voit par ceci que toute l'opération se fait automatiquement, l'opérateur n'a qu'à mettre les gabarits en place, à installer le butoir et à mettre en marche le mécanisme d'horlogerie faisant tourner le disque.

§ 12. L'égaliseur combiné avec un système de multiplicateurs et de gabarits représentant les fonctions:

$$x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots .\ x^n$$

peut servir immédiatement pour calculer les racines reelles des équations numériques de la forme:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

En effet on fixe les règles des multiplicateurs sur les valeurs a_0, a_1, a_2, ... a_{n-1} des coefficients de l'équation, on fixe de même une poulie de l'égaliseur sur a_n, les gabarits respectifs étant placés sous les boutons C des multiplicateurs et liés à un des disques.

On fera une marque sur un point A près du bout du fil de l'égaliseur et on rendra ce bout libre. On fera mouvoir le disque de $x=l$, où l est la limite inférieure des racines jusqu'à $x=L$, L étant la limite supérieure et on remarquera les valeurs de X, pour lesquelles la marque sur le fil passe par la position initiale du point A. Ces valeurs sont les racines.

Si la machine ne donne que les deux premiers chiffres de la racine exactement, je n'ai pas bésoin d'expliquer la méthode pour avoir par la machine même les deux chiffres suivants etc. .... cette méthode est évidente et la même, dont on fait usage, quand on calcule les racines à la main.

En faisant usage de deux égaliseurs et d'un petit mécanisme additionnel donnant les produits:

$$\begin{array}{l} A\operatorname{Cos}\theta \ \text{ et } A\operatorname{Sin}\theta \\ A\operatorname{Cos}2\theta \ \text{ et } A\operatorname{Sin}2\theta \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A\operatorname{Cos}n\theta \ \text{ et } A\operatorname{Sin}n\theta. \end{array}$$

on pourra obtenir mécaniquement les racines imaginaires des équations numériques. Je ne m'arreterai pas à en faire la description et le schéma, ce mécanisme ne faisant pas partie de la machine pour intégrer les équations.

§ 13. Après avoir esquisé le principe de la machine et les resultats qu'elle peut fournir je ferai quelques remarques sur la manière dont elle va être reelement construite.

En premier lieu il fallait faire un choix d'intégrateurs, car on voit bien qu'il n'est nullement indispensable de faire usage de l'intégrateur de J. Thomson. Tout appareil qui est capable de donner continuellement la valeur de l'intégrale $\int_a^x f(x)\,dx$, comme fonction de la limite supérieure, est egalement applicable.

Il y a même des doutes très sérieux que le mécanisme de Thomson puisse en général marcher ou fournir des résultats précis étant appliqué dans ma combinaison.

En effet quand cet intégrateur est employé pour le calcul de l'intégrale $\int_a^x f(x)\,dx$, la fourche est conduite à la main ou par un gabarit recevant son mouvement du disque, pouvant donc exercer sur la fourche n'importe quel effort. La transmission du mouvement du disque au cylindre se fait par l'intermédiaire du globe en *raison du frottement* entre la surface du globe et du disque et entre le globe et le cylindre. Il ne doit pas y avoir de *glissement*, qui fausserait les indications de l'appareil.

Tant que le dit frottement n'a qu'à vaincre la résistance dans les tourillons du cylindre et celles de la partie inscrivante, l'appareil peut très bien marcher car le frottement sur le globe peut être rendu très grand en comparaison avec ces résistances nuisibles.

Il en est tout autrement quand l'appareil fait partie de la machine à intégrer les équations différentielles, le cylindre doit alors mener tout un train de mécanismes auxiliaires, les résistances nuisibles peuvent s'accumuler notablement, le frottement entre le globe et le disque, et entre le globe et le cylindre peut devénir insuffisant et un petit glissement peut faire ecrouler tout l'échafaudage.

Il fallait donc choisir un mécanisme où l'on puisse aisement faire varier l'effort et où il y ait une transmission moins délicate qu'entre le globe et le cylindre. Je me suis arrêté sur le principe de l'intégraphe de M. Abdanck-Abakanowicz en modifiant convenablement la construction de cet appareil.

La partie intégrante de la machine en construction est représentée schématiquement en plan sur la (fig. 7). Un cylindre *ABCD*, que l'on recouvre d'une feuille de papier, pour y obtenir immédiatement le tracé graphique de la fonction inconnue et de ses derivées, est mis en mouvement par un petit moteur éléctrique ou par un mécanisme d'horlogerie; contre ce cylindre sont appuyées par des ressorts, dont on règle convenablement la pression, les roulettes R de quatre intégrateurs, dont un seul est représenté sur la figure, disposés symétriquement par rapport à l'axe OO, du cylindre.

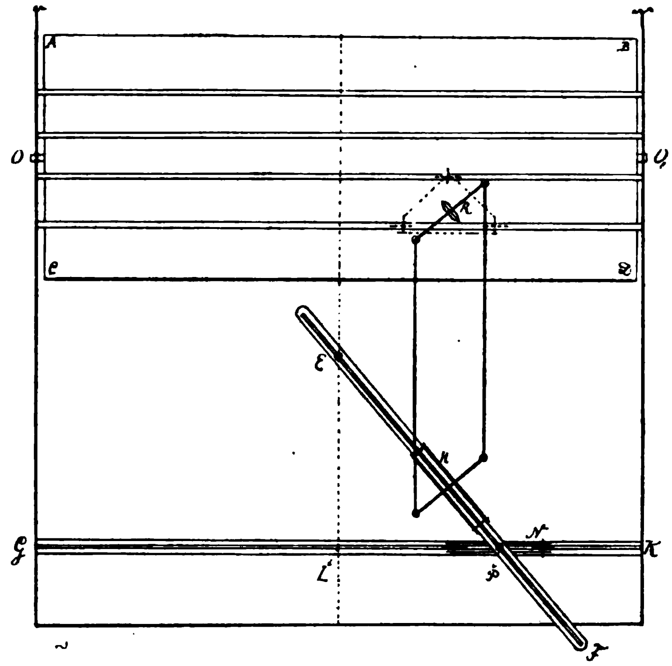

Fig. 7.

Chaque intégrateur consiste en un chariot mobile portant la roulette, ce chariot parcourt un rail parallel à l'axe du cylindre. Une règle EF pouvant librement tourner sur l'axe E porte un second chariot H sur lequel est fixé une barre transversale qui reste toujours perpendiculaire à l'axe de la règle; deux tirants rigides relient les extrémités de cette barre à une barre pareille, faisant corps, avec la fourche, qui porte l'axe de la roulette et est fixée paralèllement a cet axe. Ainsi les deux barres et les deux tirants forment un paralèllogramme, qui retient le plan de la roulette R parallel à l'axe de la règle mobile.

Un troisième chariot N parcourt le rail GK. Ce chariot porte un bouton P qui s'engage dans une rainure pratiquée le long de l'axe de la règle.

Quand ce chariot occupe une position telle que la règle est perpendiculaire à l'axe du cylindre, le plan de la roulette est perpendiculaire aux génératrices du cylindre, et pendant une rotation de celui-ci la roulette décrit une section droite du cylindre, cette section droite donne l'axe des x, quand on developpe le papier de la surface du cylindre. Supposons maintenant que le troisième chariot, ait une position telle que la distance du centre du bouton P à sa position initiale L mentionnée plus haut soit $PL = y$; soit l la distance EL de l'axe de rotation de la règle à la droite parcourue par le centre du bouton. La règle prendra une position telle que la cotangente de l'angle θ de son inclinaison sur l'axe du cylindre sera $\operatorname{cotg} \theta = \frac{y}{l}$, le plan de la roulette formera le même angle θ avec les génératrices du cylindre.

Supposons que le cylindre ait tourné de l'angle $d\varphi$, sa surface parcourera un chemin $rd\varphi = dx$, r étant la rayon du cylindre. Le frottement du charriot portant la roulette sur son rail et le frottement du chariot du paralèllogramme étant extrêmement petits en comparaison avec le frottement de glissement de la roulette le long des génératrices du cylindre, ce glissement ne se produit pas et la roulette ne reste pas en place mais décrit sur la surface du cylindre un élément d'hélice, en se deplaçant dans le sens de la génératrice, ce déplacement $dz = dx \operatorname{cotg} \theta$ ou en substituant:

$$dz = \frac{1}{l} \cdot ydx$$

donc

$$z - z_0 = \frac{1}{l} \cdot \int_a^x ydx.$$

En prenant l égale à l'unité de longueur à l'echelle du dessin, on aura pour le déplacement de la roulette et de son chariot le long du rail la formule:

$$z - z_0 = \int_a^x ydx.$$

Le chariot de la roulette porte un style, qui inscrit immédiatement sur le papier, recouvrant le cylindre, la valeur de $z - z_0$ à l'echelle admise.

On voit par ceci, que dans cet appareil c'est le cylindre, qui remplit le rôle du disque de l'appareil Thomson, le rôle de la fourche est rempli par le troisième chariot, le déplacement de la roulette et de son chariot représentent l'intégrale de la fonction fournie au troisième charoit.

Le rail gk portant le troisième chariot peut être instalé à la distance voulue (variant entre 5 et 30 centimètres dans l'appareil en construction) pour avoir les tracés à une echelle convenable.

Dans l'étude de l'appareil un soin minutieux est apporté à construire toutes les parties importantes en se conformant aux principes généraux de la constructions des instruments de précision. Ces principes sont developpés d'une manière admirable au § 198 de la *Natural Philosophy*.

Les fig. (2) et (3) suffisent pour rendre suffisament claire la construction, du moins en principe, du multiplicateur et de l'égaliseur, je ne les décris pas en détail.

§ 14. Quelle est le degré de précision que l'on peut attendre d'un appareil, tel que celui dont je viens de donner la description? Ayant dans le Bassin Expérimental une expérience journalière dans le maniement de planimètres de différents modèles et ayant étudié soigneusement l'intégraphe de M. Abdanck-Abakanowicz, je compte pour des équations peu compliquées, les équations linéaires par exemple, de réaliser une précision telle que l'erreur absolue dans les ordonnées des courbes représentants l'intégrale générale et ses derivées ne surpasse pas un $1/_2$ millimètre, c'est à dire que l'erreur rélative pour les ordonnées moyennes d'une longueur de 100 à 150 millimètres ne surpasse pas un $1/_2$ %; une telle précision est plus que suffisante dans les problèmes pratiques de l'art de l'ingénieur.

Tout le soin possible sera appliqué à obtenir la plus grande précision sans trop compliquer la construction de l'appareil; l'outillage excellent des ateliers de M. Wetzer, la manière conscienscieuse avec laquelle tous ses travaux sont executés et son expérience pratique acquise par quarante ans de labeur m'en paraissent une garantie plus que suffisante.